INDUKSI MATEMATIKA

A. Induksi Matematika Pada Pembuktian Rumus

Dalam kehidupan sehari hari, kita sering mengambil suatu kesimpulan berdasarkan data-data yang sudah ada.
Kesimpulan tersebut belum ***valid***, karena masih bersifat dugaan (hipotesa)
Kesimpulan akan lebih valid jika hipotesa tersebut diuji berdasarkan fakta yang sudah ada. Cara seperti ini merupakan inti dari **prinsip induksi**

Langkah langkah pembuktian rumus dengan induksi matematika :
(1) Langkah mengambil data *(base case)*
- Ambil beberapa data (n = 1, 2, 3, …)
- Tetapkan kesimpulan sementara /hipotesa (rumus dianggap benar untuk n= k)

(2) Langkah menguji hipotesa *(inductive step)*
- Rumus diuji dengan pengambilan n = k + 1
  Atau Rumus diuji dengan rumus lain yang sudah valid

Untuk lebih jelasnya ikutilah contoh soal berikut ini

01. Dengan induksi matematika buktikanlah bahwa $7^{2n+1}+1$ habis dibagi 8 untuk n bilangan asli

Jawab

Untuk n = 1, diperoleh $7^{2(1)+1}+1$ = 344 habis dibagi 8 (terbukti)

Untuk n = 2, diperoleh $7^{2(2)+1}+1$ = 16.808 habis dibagi 8 (terbukti)

Untuk n = 3, diperoleh $7^{2(3)+1}+1$ = 823.544 habis dibagi 8 (terbukti)

Dari data diatas anggap bahwa rumus benar untuk n = k, artinya
$7^{2k+1}+1$ habis dibagi 8 (hipotesa)
Akan dibuktikan bahwa rumus juga benar untuk n = k + 1, artinya
$7^{2(k+1)+1}+1$ juga habis dibagi 8

Tinjau : $7^{2(k+1)+1}+1 = 7^{2k+3}+1$
$= 7^{2k+1}.7^{2}+1$
$= 49\left(7^{2k+1}\right) + 49 - 8$
$= 49\left(7^{2k+1}+1\right) - 8$

Karena 49 $\left(7^{2k+1}+1\right)$ habis dibagi 8 (menurut hipotesa) maka 49 $\left(7^{2k+1}+1\right) - 8$ juga habis dibagi 8

Jadi terbukti bahwa $7^{2n+1}+1$ habis dibagi 8 untuk n bilangan asli

02. Dengan induksi matematika buktikanlah bahwa $3^{4n} - 1$ habis dibagi 80 untuk n bilangan asli

Jawab

Untuk n = 1, diperoleh $3^{4(1)} - 1$ = 81 – 1 = 80 habis dibagi 80 (terbukti)

Untuk n = 2, diperoleh $3^{4(2)} - 1$ = 6561 – 1 = 6560 habis dibagi 80 (terbukti)

Untuk n = 3, diperoleh $3^{4(3)} - 1$ = 531441 – 1 = 531440 habis dibagi 80 (terbukti)

Dari data diatas anggap bahwa rumus benar untuk n = k, artinya

$3^{4k} - 1$ habis dibagi 80 (hipotesa)

Akan dibuktikan bahwa rumus juga benar untuk n = k + 1, artinya

$3^{4(k+1)} - 1$ juga habis dibagi 80

Tinjau : $3^{4(k+1)} - 1 = 3^{4k+4} - 1$

$= 3^{4k}.3^4 - 1$

$= 81.3^{4k}. - 1$

$= 81.3^{4k} - 81 + 80$

$= 81(3^{4k}. - 1) + 80$

Karena $3^{4k} - 1$ habis dibagi 80 (menurut hipotesa) maka $81(3^{4k} - 1)$ juga habis dibagi 80

Sehingga $81(3^{4k}. - 1) + 80$ habis diabgi 80

Jadi terbukti bahwa $3^{4n} - 1$ habis dibagi 80 untuk n bilangan asli

03. Dengan induksi matematika buktikanlah bahwa $11^n - 6$ habis dibagi 5 untuk setiap n bilangan asli

Jawab

Untuk n = 1, diperoleh $11^1 - 6 = 11 - 6 = 5$ habis dibagi 5 (terbukti)

Untuk n = 2, diperoleh $11^2 - 6 = 121 - 6 = 115$ habis dibagi 5 (terbukti)

Untuk n = 3, diperoleh $11^3 - 6 = 1331 - 6 = 1325$ habis dibagi 5 (terbukti)

Dari data diatas anggap bahwa rumus benar untuk n = k, artinya

$11^k - 6$ habis dibagi 5 untuk setiap k bilangan asli (hipotesa)

Akan dibuktikan bahwa rumus juga benar untuk n = k + 1, artinya

$11^{k+1} - 6$ juga habis dibagi 5

Tinjau : $11^{k+1} - 6 = 11^k\,11 - 6$

$= 11\ 11^k - 66 + 60$

$= 11(11^k - 6) + 60$

Karena $11^k - 6$ habis dibagi 5 (menurut hipotesa) maka $11(11^k - 6)$ juga habis dibagi 5, sehingga $11(11^k - 6) + 60$ habis diabgi 5

Jadi terbukti bahwa $11^n - 6$ habis dibagi 5 untuk setiap n bilangan asli

04. Buktikanlah bahwa $3^{2n} + 2^{2n+2}$ habis dibagi 5 untuk n bilangan asli

Jawab

Ambil n = 1 maka $3^{2(1)} + 2^{2(1)+2}$ = $3^2 + 2^4$ = 9 + 16 = 25 (habis dibagi 5)

Ambil n = 2 maka $3^{2(2)} + 2^{2(2)+2}$ = $3^4 + 2^6$ = 81 + 64 = 155 (habis dibagi 5)

Ambil n = 3 maka $3^{2(3)} + 2^{2(3)+2}$ = $3^6 + 2^8$ = 81 + 64 = 985 (habis dibagi 5)

Disimpulkan sementara (hipotesis), bahwa

Untuk n = k maka $3^{2k} + 2^{2k+2}$ habis dibagi 5

Akan dibuktikan bahwa Untuk n = k + 1 maka $3^{2(k+1)} + 2^{2(k+1)+2}$ juga habis dibagi 5

Bukti : $3^{2(k+1)} + 2^{2(k+1)+2}$ = $3^{2(k+1)} + 2^{2(k+1)+2}$

= 3^{2k+2} + 2^{2k+4}

= $3^{2k}.3^2$ + $2^{2k+2}.2^2$

= $9\left(3^{2k}\right)$ + $4\left(2^{2k+2}\right)$

= $5\left(3^{2k}\right)$ + $4\left(3^{2k}\right)$ + $4\left(2^{2k+2}\right)$

= $5\left(3^{2k}\right)$ + $4\left(3^{2k} + 2^{2k+2}\right)$

Karena $4\left(3^{2k} + 2^{2k+2}\right)$ habis dibagi 5 (berdasarkan hipotesa) dan $5\left(3^{2k}\right)$ juga habis dibagi 5, maka dapat disimpulkan $5\left(3^{2k}\right)$ + $4\left(3^{2k} + 2^{2k+2}\right)$ habis dibagi 5

Jadi terbukti bahwa $3^{2n} + 2^{2n+2}$ habis dibagi 5 untuk n bilangan asli

05. Buktikanlah bahwa n^3 + 2n habis dibagi 3 untuk n bilangan asli

Jawab

Ambil n = 1 maka $(1)^3$ + 2(1) = 1 + 2 = 3 (habis dibagi 3)

Ambil n = 2 maka $(2)^3$ + 2(2) = 8 + 4 = 12 (habis dibagi 3)

Ambil n = 3 maka $(3)^3$ + 2(3) = 27 + 6 = 33 (habis dibagi 3)

Disimpulkan sementara (hipotesis), bahwa

Untuk n = k maka k^3 + 2k habis dibagi 3 untuk k bilangan asli

Akan dibuktikan bahwa Untuk n = k + 1 maka $(k+1)^3$ + 2(k+1) juga habis dibagi 3

Bukti : $(k+1)^3$ + 2(k+1) = k^3 + 3k^2 + 3k + 1 + 2k + 2

= k^3 + 2k + 3k^2 + 3k + 3

= (k^3 + 2k) + 3(k^2 + k + 1)

Karena (k^3 + 2k) habis dibagi 3 (berdasarkan hipotesa) dan 3(k^2 + k + 1) juga habis dibagi 3, maka dapat disimpulkan (k^3 + 2k) + 3(k^2 + k + 1) habis dibagi 3

Jadi terbukti bahwa n^3 + 2n habis dibagi 3 untuk n bilangan asli

06. Buktikanlah bahwa untuk setiap bilangan bulat n, berlaku $(2n + 1)^2$ selalu bernilai ganjil

Jawab

Ambil n = 1 maka $(2(1) + 1)^2 = (3)^2 = 9$ (bilangan ganjil)

Ambil n = 2 maka $(2(2) + 1)^2 = (5)^2 = 25$ (bilangan ganjil)

Ambil n = 3 maka $(2(3) + 1)^2 = (7)^2 = 49$ (bilangan ganjil)

Disimpulkan sementara (hipotesis), bahwa

Untuk n = k maka $(2k + 1)^2$ selalu bernilai ganjil untuk k bilangan asli

Akan dibuktikan bahwa Untuk n = k + 1 maka $(2[k+1] + 1)^2$ juga ganjil

Bukti : $(2[k+1] + 1)^2 = (2k+2 + 1)^2$

$= ([2k+1] + 2)^2$

$= (2k + 1)^2 + 4(2k + 1) + 4$

$= (2k + 1)^2 + 8k + 4 + 4$

$= (2k + 1)^2 + 8k + 8$

$= (2k + 1)^2 + 8(k + 1)$

Karena $(2k + 1)^2$ adalah bilangan ganjil (berdasarkan hipotesa) dan 8(k + 1) adalah bilangan genap, maka $(2k + 1)^2 + 8(k + 1)$ selalu bernilai ganjil

Jadi terbukti bahwa untuk setiap bilangan bulat n, berlaku $(2n + 1)^2$ selalu bernilai ganjil

07. Buktikanlah bahwa untuk setiap n bilangan asli, berlaku $2n \leq 2^n$

Jawab

Ambil n = 1 maka $2(1) \leq 2^1$ artinya $2 \leq 2$ (bernilai benar)

Ambil n = 2 maka $2(2) \leq 2^2$ artinya $4 \leq 4$ (bernilai benar)

Ambil n = 3 maka $2(3) \leq 2^3$ artinya $6 \leq 8$ (bernilai benar)

Disimpulkan sementara (hipotesis), bahwa

Untuk n = k maka $2k \leq 2^k$ untuk setiap k bilangan asli

Akan dibuktikan bahwa Untuk n = k + 1 maka $2(k + 1) \leq 2^{(k+1)}$

Bukti : $2(k + 1) \leq 2^{(k+1)}$

$2k + 2 \leq 2^k . 2^1$

$2k + 2 \leq 2\left(2^k\right)$

$2k + 2 \leq 2^k + 2^k$

Karena $2k \leq 2^k$ (berdasarkan hipotesa) dan $2 \leq 2^k$ untuk setiap k bilangan asli, maka $2k + 2 \leq 2^k + 2^k$

Jadi terbukti bahwa untuk setiap n bilangan asli, berlaku $2n \leq 2^n$

08. Buktikanlah bahwa untuk $n \geq 4$ dan n bilangan asli berlaku $3^n > n^3$

Jawab

Ambil n = 4 maka $3^4 > 4^3$ artinya 81 > 64 (bernilai benar)

Ambil n = 5 maka $3^5 > 5^3$ artinya 243 > 125 (bernilai benar)

Ambil n = 6 maka $3^6 > 6^3$ artinya 729 > 216 (bernilai benar)

Disimpulkan sementara (hipotesis), bahwa

Untuk n = k maka $3^k > k^3$ untuk setiap k bilangan asli dan $k \geq 4$

Akan dibuktikan bahwa Untuk n = k + 1 maka $3^{k+1} > (k+1)^3$

Bukti : $3^{k+1} > (k+1)^3$

$$3^k . 3^1 > k^3 + 3k^2 + 3k + 1$$

$$3\left(3^k\right) > k^3 + 3k^2 + 3k + 1$$

$$\left(3^k\right) + \left(3^k\right) + \left(3^k\right) > k^3 + 3k^2 + 3k + 1$$

Karena untuk $k \geq 4$ maka $3^k > k^3$ (berdasarkan hipotesa)

$k \geq 4$ maka $3^k > 3.k^2$

$k \geq 4$ maka $3^k > 3k + 1$

Sehingga terbukti bahwa $\left(3^k\right) + \left(3^k\right) + \left(3^k\right) > k^3 + 3k^2 + 3k + 1$ untuk setiap k bilangan asli, dan $k \geq 4$.

Artinya untuk $n \geq 4$ dan n bilangan asli berlaku $3^n > n^3$

09. Buktikanlah bahwa $x^n - 1$ habis dibagi (x – 1) untuk setiap n bilangan asli

Jawab

Untuk n = 1, maka $x^1 - 1 = x - 1$ habis dibagi (x – 1)

Untuk n = 2, maka $x^2 - 1 = (x - 1)(x + 1)$ habis dibagi (x – 1)

Untuk n = 3, maka $x^3 - 1 = (x - 1)(x^2 + x + 1)$ habis dibagi (x – 1)

Dari data diatas anggap bahwa rumus benar untuk n = k, artinya

$x^k - 1$ habis dibagi (x – 1) untuk setiap n bilangan asli (hipotesa)

Akan dibuktikan bahwa rumus juga benar untuk n = k + 1, artinya

$x^{k+1} - 1$ habis dibagi (x – 1)

Bukti : $x^{k+1} - 1 = x^k . x^1 - 1$

$$= x\,x^k - x + x - 1$$

$$= x(x^k - 1) + (x - 1)$$

Karena $x(x^k - 1)$ habis dibagi (x – 1) (menurut hipotesa) maka berarti bahwa $x(x^k - 1) + (x - 1)$ juga habis dibagi (x – 1). Jadi terbukti bahwa $x^n - 1$ habis dibagi (x – 1) untuk setiap n bilangan asli

10. Dengan induksi matematika buktikanlah bahwa n(n + 1)(n + 2) habis dibagi 3 untuk n bilangan asli

Jawab

Untuk n = 1, diperoleh 1(1 + 1)(1 + 2) = 6 habis dibagi 3 (terbukti)

Untuk n = 2, diperoleh 2(2 + 1)(2 + 2) = 24 habis dibagi 3 (terbukti)

Untuk n = 3, diperoleh 3(3 + 1)(3 + 2) = 60 habis dibagi 3 (terbukti)

Dari data diatas anggap bahwa rumus benar untuk n = k, artinya

k(k + 1)(k + 2) habis dibagi 3 (hipotesa)

Akan dibuktikan bahwa rumus juga benar untuk n = k + 1, artinya

[k+1]([k+1] + 1)([k+1] + 2) juga habis dibagi 3

Tinjau : [k+1]([k+1] + 1)([k+1] + 2) = (k+1)(k+2)(k+3)

= (k+1)(k+2)k + (k+1)(k+2)3

Karena (k+1)(k+2)k habis dibagi 3 (menurut hipotesa) dan (k+1)(k+2)3 juga habis dibagi 3 maka 81((k+1)(k+2)k + (k+1)(k+2)3 habis dibagi 3

Sehingga [k+1]([k+1] + 1)([k+1] + 2) habis diabgi 3

Jadi terbukti bahwa n(n + 1)(n + 2) habis dibagi 3 untuk n bilangan asli